

文章编号:1005-3085(2010)04-0593-06

## 随机负债情形的信用违约互换定价\*

欧阳异能<sup>1,2</sup>, 徐 云<sup>1,†</sup>

(1- 新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046;

2- 石河子大学师范学院数学系, 新疆 石河子 832003)

**摘 要:** 信用违约互换是一种重要的信用衍生品。本文在信用违约互换基本原理的基础上, 根据信用违约互换的现金流对信用违约互换的价值进行分析, 并假定参考资产随机负债, 采用结构化模型框架下无套利原理的定价方法, 得到信用违约互换定价的基本模型。利用具有漂移的 Brown 运动的最小值分布求得违约概率密度函数, 最终给出了信用违约互换的定价公式。

**关键词:** 信用违约互换; 违约概率密度; 鞅方法; 反射原理

**分类号:** AMS(2000) 62P05

**中图分类号:** O29; F830

**文献标识码:** A

### 1 引言

信用违约互换(CDS)是最基本的信用衍生品之一, 是指信用保护买方(A)向保护卖方(B)支付一定费用, 如果双方约定的参考资产(C)在规定的时间内发生特定信用事件, 则信用保护卖方向信用保护买方支付相应赔偿的互换交易结构。

信用违约互换的定价方法主要分为结构化模型<sup>[1,2]</sup>和强度模型<sup>[3]</sup>, 这两类模型从不同的角度对公司信用违约行为的产生进行了解释, 对关键变量的不同假设都有优点和不足。文献[4,5]针对文献[2]模型拓展为任何时刻 $t$ , 当公司资产价值跌至某一特定水平, 则违约发生。文献[3]将公司的违约现象看作不可预测的因素造成的, 利用 Poisson 过程的特征参数—强度刻画事件发生的可能性, 但是违约事件强度参数的确定还是广泛关注的难题。

本文将讨论随机负债情形下信用违约互换定价, 采用结构化模型框架下无套利原理的定价方法, 利用具有漂移的 Brown 运动的最小值分布求得违约概率密度函数, 给出信用违约互换定价公式。

### 2 模型建立

假设金融市场概率空间为 $(\Omega, F, P)$ ,  $P$ 为市场概率测度, 无风险利率为 $r$ 。C的资产价值和负债分别服从 $(\Omega, F, P)$ 上的几何 Brown 运动 $dV_t = \mu_1 V_t dt + \sigma_1 V_t dB_t^1$ ,  $dD_t = \mu_2 D_t dt + \sigma_2 D_t dB_t^2$ ,  $\mu_i, \sigma_i$ 为常数,  $B_t^i$ 为 $(\Omega, F, P)$ 上标准 Brown 运动, 且 $dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt$ ,  $i = 1, 2$ 。约定C的资产价值低于其债券值时发生违约, 即C违约时间为 $\tau = \inf\{t : t > 0, \delta_t < 1\}$ ,  $\delta_t = \frac{V_t}{D_t}$ 。互换保费持续支付到违约事件发生或合约到期, 若C破产, 考虑到对C进行清算需要一段时间 $\theta$ , 于是B的违约赔偿在结算日 $\tau + \theta$ 才发生。

收稿日期: 2009-02-27. 作者简介: 欧阳异能(1979年4月生), 男, 讲师. 研究方向: 数理金融.

\*基金项目: 新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目(XJEDU2008I09).

†通讯作者: 徐云 E-mail: xy\_xju@126.com

设  $\widehat{B}_t^1$  是  $P$  下与  $B_t^1$  相互独立的标准 Brown 运动, 则  $dB_t^2 = \rho dB_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\widehat{B}_t^1$ . 令

$$\theta_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}, \quad \theta_2 = \frac{\mu_2 - (r + \rho\sigma_2\theta_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}, \quad dW_t^1 = \theta_1 dt + dB_t^1, \quad d\overline{B}_t^1 = \theta_2 dt + d\widehat{B}_t^1,$$

$$N_t = \frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ - \left( \theta_1 B_t^1 + \theta_2 \widehat{B}_t^1 \right) - \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) t \right\}.$$

由 Girsanov 定理知  $W_t^1, \overline{B}_t^1$  是测度  $Q$  下的相互独立标准 Brown 运动,  $dV_t = rV_t dt + \sigma_1 V_t dW_t^1$ ,  $dD_t = rD_t dt + \sigma_2 D_t d\overline{B}_t^1$ , 其中  $dW_t^2 = \rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} d\overline{B}_t^1$ , 且满足  $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ .

现考察 A 与 B 在 0 时刻签订面值 1, 到期日  $T$  的信用违约互换合约, C 在任何时刻  $t \leq T$  都可能违约, 等时间间隔  $\Delta$  按比例支付费用, 且不存在交易对手风险. 记  $w$ : 信用违约互换价格, 即每期支付保费的比率;  $R$ : 表示违约发生后债券的期望挽回率;  $T_i$ : 每期支付信用违约互换保费的时间,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $f(t)$ : 表示  $\tau$  的概率密度函数.

最后一次支付前, A 每期支付  $w1_{\{\tau \geq T_i\}}$ , 其在 0 时刻的价值为  $E_Q(w e^{-rT_i} 1_{\{\tau \geq T_i\}})$ , 最后一次支付 0 时刻的价值为

$$\sum_{i=1}^n E_Q \left( w e^{-rT_i} \left( \frac{\tau - T_{i-1}}{\Delta} \right) 1_{\{T_{i-1} < \tau < T_i\}} \right),$$

因此 A 在 0 时刻的价值为

$$PV_b = \sum_{i=1}^n E_Q \left( w e^{-rT_i} 1_{\{\tau \geq T_i\}} \right) + \sum_{i=1}^n E_Q \left( w e^{-rT_i} \left( \frac{\tau - T_{i-1}}{\Delta} \right) 1_{\{T_{i-1} < \tau < T_i\}} \right).$$

若到期之前违约发生, 在赔偿结算日  $\tau + \theta$  时, A 从 B 得到赔偿额  $(1-R)1_{\{\tau \leq T\}}$ , 在 0 时刻的价值为  $PV_s = E_Q((1-R)e^{-r(\tau+\theta)} 1_{\{\tau \leq T\}})$ .

根据无套利原理, A 支付互换保费的比率为

$$\begin{aligned} w &= \frac{E_Q((1-R)e^{-r(\tau+\theta)} 1_{\{\tau \leq T\}})}{\sum_{i=1}^n E_Q(e^{-rT_i} 1_{\{\tau \geq T_i\}}) + \sum_{i=1}^n E_Q(e^{-rT_i} \left( \frac{\tau - T_{i-1}}{\Delta} \right) 1_{\{T_{i-1} < \tau < T_i\}})} \\ &= \frac{(1-R) \int_0^T e^{-r(x+\theta)} f(x) dx}{\sum_{i=1}^n \int_{T_i}^T e^{-rT_i} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-rT_i} \left( \frac{x - T_{i-1}}{\Delta} \right) f(x) dx}. \end{aligned}$$

### 3 违约概率密度

引理 1<sup>[6]</sup> 设  $B_t^* = \min_{0 \leq s \leq t} B_s$ ,  $B_s$  是在测度  $P$  下的一维标准 Brown 运动, 则  $B_t^*$  和  $B_t$  的联合概率密度函数为

$$h_1(x, y) = \frac{-2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left( -\frac{(2x-y)^2}{2t} \right),$$

其中  $x \leq 0, y \geq x$ .

定理 1 设  $X_s = B_s + \mu s$ ,  $\mu$  为常数,  $X_t^* = \min_{0 \leq s \leq t} X_s$ , 则  $X_t^*$  和  $X_t$  的联合分布函数为

$$H_2(x, y) = \Phi \left( \frac{x - \mu t}{\sqrt{t}} \right) + e^{2x\mu} \left( \Phi \left( \frac{y - (2x + \mu t)}{\sqrt{t}} \right) - \Phi \left( \frac{-(x + \mu t)}{\sqrt{t}} \right) \right),$$

其中  $x \leq 0, y \geq x$ 。

证明 设  $x \leq 0, y \geq x$ , 引入等价鞅测度, 定义如下

$$M_t = \frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left(-\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right).$$

根据 Girsanov 定理,  $\tilde{B}_s = B_s + \mu s$  在  $[0, t]$  上是测度  $\tilde{P}$  下的一维标准 Brown 运动, 于是  $X_s = \tilde{B}_s$  在  $[0, t]$  上是关于测度  $\tilde{P}$  的一维标准 Brown 运动。于是由引理 1 可得

$$\begin{aligned} P(X_t^* \leq x, X_t \leq y) &= E_P(1_{\{X_t^* \leq x, X_t \leq y\}}) = E_{\tilde{P}}(M_t^{-1} 1_{\{X_t^* \leq x, X_t \leq y\}}) \\ &= E_{\tilde{P}}\left(\exp\left(\mu X_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) 1_{\{X_t^* \leq x, X_t \leq y\}}\right) \\ &= \int_{-\infty}^y \left( \int_{-\infty}^x \exp\left(\mu q - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \frac{-2(2p-q)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2p-q)^2}{2t}\right) dp \right) dq \\ &\quad - \int_{-\infty}^x \left( \int_q^x \exp\left(\mu q - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \frac{-2(2p-q)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2p-q)^2}{2t}\right) dp \right) dq \\ &= e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{y - (2x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) - \left( e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{-(x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \right). \end{aligned}$$

所以,  $X_t^*$  和  $X_t$  的联合分布函数为

$$\begin{aligned} H_2(x, y) &= P(X_t^* \leq x, X_t \leq y) \\ &= e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{y - (2x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) - \left( e^{2x\mu} \Phi\left(\frac{-(x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2x\mu} \left( \Phi\left(\frac{y - (2x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-(x + \mu t)}{\sqrt{t}}\right) \right). \end{aligned}$$

**定理 2** 设  $Y_s = \sigma B_s + \mu s$ ,  $\mu, \sigma$  为常数, 且  $\sigma > 0$ ,  $Y_t^* = \min_{0 \leq s \leq t} Y_s$ , 则  $Y_t^*$  和  $Y_t$  的联合分布函数为

$$G(x, y) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{2x\mu\sigma^{-2}} \left( \Phi\left(\frac{y - (2x + \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-(x + \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right),$$

其中  $x \leq 0, y \geq x$ 。

证明 设  $Z_t = \frac{Y_t}{\sigma} = B_t + \frac{\mu}{\sigma} t$ ,  $Z_t^* = \min_{0 \leq s \leq t} Z_s$ , 由定理 1 可得

$$\begin{aligned} G(x, y) &= P(Y_t^* \leq x, Y_t \leq y) = P\left(Z_t^* \leq \frac{x}{\sigma}, Z_t \leq \frac{y}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\frac{x}{\sigma}\frac{\mu}{\sigma}} \left( \Phi\left(\frac{\frac{y}{\sigma} - (2\frac{x}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} t)}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-(\frac{x}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} t)}{\sqrt{t}}\right) \right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{2x\mu\sigma^{-2}} \left( \Phi\left(\frac{y - (2x + \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-(x + \mu t)}{\sigma \sqrt{t}}\right) \right). \end{aligned}$$

当  $y = \infty$  时, 可得以下推论。

推论 1  $Y_t^*$  的概率分布函数为

$$H(x) = P(Y_t^* \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) + e^{2x\mu\sigma^{-2}} \Phi\left(\frac{x + \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right), \quad x \leq 0.$$

定理 3 假设参考资产 C 的资产价值和负债分别服从几何 Brown 运动  $dV_t = rV_t dt + \sigma_1 V_t dW_t^1$ ,  $dD_t = rD_t dt + \sigma_2 D_t dW_t^2$ , 其中  $r$  为无风险利率,  $\sigma_i$  为常数,  $W_t^i$  为  $Q$  测度下标准 Brown 运动, 且设  $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ , 则 C 的违约概率密度函数为

$$f(t) = -\frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \ln \frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta \sqrt{t^3}} \varphi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right) + e^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2) \ln \frac{D_0}{V_0}} \cdot \frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t - \ln \frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta \sqrt{t^3}} \varphi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right),$$

其中  $\mu_\delta = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$ ,  $\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$ .

证明 由 Itô 公式可得  $\delta_t = \frac{V_t}{D_t}$  的微分如下<sup>[7]</sup>

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \frac{dV_t}{V_t} - \frac{dD_t}{D_t} + \left(\frac{dD_t}{D_t}\right)^2 - \frac{dV_t}{V_t} \frac{dD_t}{D_t}.$$

将  $Q$  测度下的  $\frac{dV_t}{V_t}$  和  $\frac{dD_t}{D_t}$  代入, 得

$$\frac{d\delta_t}{\delta_t} = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_1 dW_t^1 - \sigma_2 dW_t^2.$$

定义

$$\mu_\delta = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_\delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad W_t^\delta = \frac{\sigma_1 W_t^1 - \sigma_2 W_t^2}{\sigma_\delta},$$

则  $E(W_t^\delta) = 0$ ,  $\text{Var}(W_t^\delta) = 1$ , 于是  $W_t^\delta$  为测度  $Q$  下标准 Brown 运动, 所以  $\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \mu_\delta dt + \sigma_\delta dW_t^\delta$ , 解得

$$\delta_t = \delta_0 e^{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \sigma_\delta W_t^\delta}, \quad \delta_0 = \frac{V_0}{D_0}.$$

由推论 1 可得违约概率为

$$\begin{aligned} Q(\tau \leq t) &= 1 - Q(\tau > t) = 1 - Q\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \delta_s \geq 1\right) \\ &= 1 - Q\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \left((\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)s + \sigma_\delta W_s^\delta\right) \geq \ln \frac{D_0}{V_0}\right) \\ &= Q\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \left((\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)s + \sigma_\delta W_s^\delta\right) < \ln \frac{D_0}{V_0}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right) + e^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2) \ln \frac{D_0}{V_0}} \Phi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

所以公司的违约概率密度函数为

$$f(t) = -\frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \ln \frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta \sqrt{t^3}} \varphi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right) + e^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2) \ln \frac{D_0}{V_0}} \cdot \frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t - \ln \frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta \sqrt{t^3}} \varphi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta \sqrt{t}}\right).$$

4 数值模拟

下面通过具体例子来说明前面的定价模型，考虑一份5年期合约，初始资产值为1000万，初始负债为400万，挽回率为40%，无风险利率为6%。在其它量不变的情况下，我们分别得到CDS价格 $w$ 与变量 $T, \theta, R, \frac{D_0}{V_0}$ 的关系如图1至图4。图1表明，CDS价格随合约期限 $T$ 增加而迅速减少，这也与实际相符，当合约期限越长，违约可能性就越大，因此保费应该越少。图2表明，清算时间越长，合约买方得到的赔偿的现值就越少，因此CDS价格越少。而挽回率 $R$ 也是影响CDS价格的一个重要因素，挽回率越大，赔偿就会越少，所以保费自然就会少。最后考虑公司初始负债比 $\frac{D_0}{V_0}$ ，当比值为0，说明公司没有负债，因而保费为0，当比值越大，说明公司负债越多，违约可能性越大，CDS价格就增大。

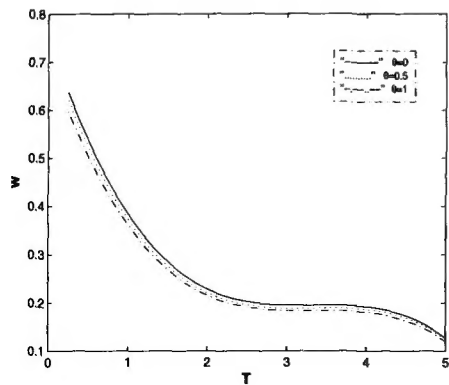


图 1： 期限 $T$ 与 CDS 价格 $w$ 关系

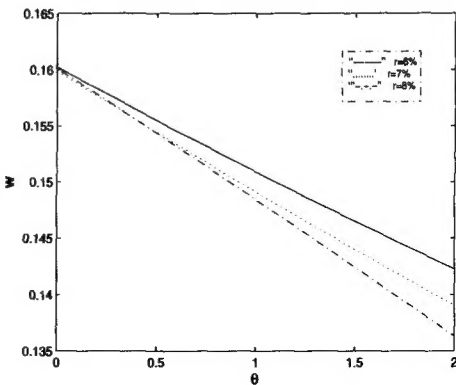


图 2： 清算时间 $\theta$ 与 CDS 价格 $w$ 关系

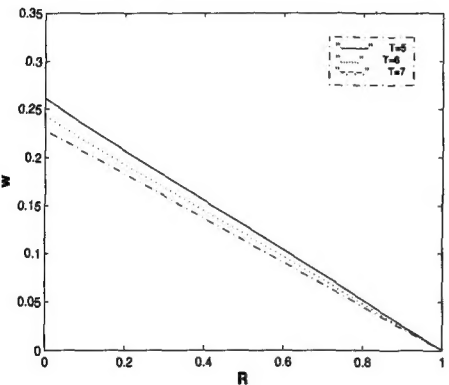


图 3： 挽回率 $R$ 与 CDS 价格 $w$ 关系

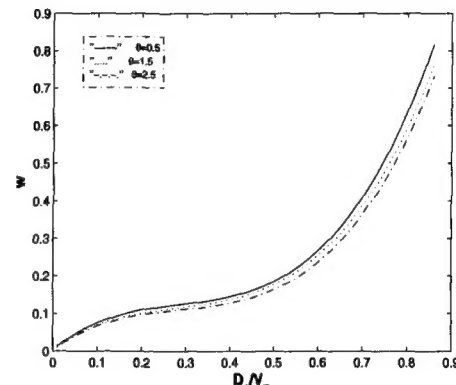


图 4： 初始负债比 $D_0/V_0$ 与 CDS 价格 $w$ 关系

## 5 结束语

本文讨论了随机负债情形下信用违约互换的定价问题。采用结构化模型框架下无套利原理定价方法,考虑结算风险,利用鞅方法得到公司的违约概率密度,进一步得出信用违约互换的价格。最后通过数值计算,讨论了信用违约互换的价格与合约期限 $T$ 、违约清算时间 $\theta$ 、挽回率 $R$ 及公司初始负债比 $D_0/V_0$ 的关系。

### 参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The price of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political and Economy, 1973, 81: 637-654
- [2] Merton R C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449-470
- [3] Jarrow R, Turnbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 53-86
- [4] Longstaff F A, Schwartz E S. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 789-819
- [5] Black F, Cox J. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351-367
- [6] 龚光鲁. 随机微分方程引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987  
Gong G L. Introduction to Stochastic Differential Equations[M]. Beijing: Peking University Press, 1987
- [7] Ammann M. 信用风险评估—方法-模型-应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004  
Ammann M. Credit Risk Valuation: Methods, Models, and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004

## The Pricing of Credit Default Swap under Stochastic Liabilities

OUYANG Yi-neng<sup>1,2</sup>, XU Yun<sup>1,†</sup>

(1- College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046;

2- Department of Mathematics, Normal College, Shihezi University, Shihezi, Xinjiang 832003)

**Abstract:** The credit default swap is an important credit derivative. Based on the basic principle of the credit default swap, this paper analyses the value of a credit default swap in terms of its cash flow. Furthermore, the arbitrage-free principle and structural approaches are used to price the credit default swap under stochastic liabilities, and we get a basic model of the swap. The function of default probability density is obtained by the distribution of the minimum of a Brown motion with a drift, and then we obtain the pricing formula to a credit default swap by above results.

**Keywords:** credit default swap; default probability density; martingale methods; reflection principle

Received: 27 Feb 2009. Accepted: 10 Jan 2010.

Foundation item: FSRPEXJ (XJEDU2008I09).

<sup>†</sup>Corresponding author: Y. Xu. E-mail address: xy\_xju@126.com